Dans tout le problème, S désigne l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ayant pour éléments les fonctions réelles de la variable réelle x développables en série entière en x sur $\mathbb{R}$.

I

On désigne par F le sous-espace vectoriel de S engendré par le système (f_1, f_2, f_3, f_4) des quatre fonctions :

$$f_1 : x \mapsto ch\ x \ ; \ f_2 : x \mapsto sh\ x \ ; \ f_3 : x \mapsto x\ ch\ x \ ; \ f_4 : x \mapsto x\ sh\ x \ ;$$

les notations ch et sh représentant respectivement les fonctions "cosinus hyperbolique" et "sinus hyperbolique".

a) Soit D l'application de F dans S associant à toute fonction f de F sa fonction dérivée f' :

$$Df = f' .$$

1) Vérifier que D définit un endomorphisme de F.

2) Ecrire la matrice $A \in M_4(\mathbb{R})$ dont les coefficients a_{ij}, $(i = 1, 2, 3, 4 \ ; \ j = 1, 2, 3, 4)$ sont définis par :

$$Df_j = \sum_{i=1}^{4} a_{ij} f_i$$

3) Calculer, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, A^{2p} et A^{2p+1}. (On pourra utiliser les notations : $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$; $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = J_2$).

b) Soit la fonction $W : x \mapsto W(x)$, où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $W(x)$ est le déterminant :

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) & f_4(x) \\ f'_1(x) & f'_2(x) & f'_3(x) & f'_4(x) \\ f''_1(x) & f''_2(x) & f''_3(x) & f''_4(x) \\ f'''_1(x) & f'''_2(x) & f'''_3(x) & f'''_4(x) \end{vmatrix}$$

où, pour tout i, f_i, f'_i, f''_i désignent les dérivées d'ordres 1, 2, 3, respectivement de f_i.

1) Utilisant les matrices A, A^2, A^3, calculer $W(o)$.

2) Montrer alors que (f_1, f_2, f_3, f_4) est une base de F, A définissant l'endomorphisme D dans cette base.

c) Dans cette question, λ désigne un réel quelconque.

1) Expliciter pour tout x réel, la matrice :

$x A^2 - \lambda A - xI$. (I étant la matrice unité d'ordre 4).

2) Soit T_λ l'application de F dans S associant à toute fonction f de F la fonction :

$T_\lambda(f) : x \mapsto f'(x) - \lambda f(x) - x f(x)$.

Déduire du calcul précédent que T_λ définit un endomorphisme de F, et écrire la matrice B_λ définissant T_λ dans la base (f_1, f_2, f_3, f_4) de F.

d)

1) Déterminer $Ker\ T_\lambda$ et $Im\ T_\lambda$ pour tout λ réel.

2) Déduire du résultat de cette étude la solution générale sur R de l'équation différentielle :

$(\mathcal{E}_\lambda)$ $\qquad xf'' - \lambda f' - xf = 0$,

pour les deux valeurs suivantes de λ : $\lambda = 0$ et $\lambda = 2$.

II

Dans cette partie, on se propose de rechercher, pour tout λ réel, le sous-espace vectoriel S_λ de S dont les éléments sont les fonctions f de S qui sont solutions sur R de l'équation différentielle :

$(\mathcal{E}_\lambda)$ $\qquad xf'' - \lambda f' - xf = 0$.

a) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la série entière de terme général $a_n x^n$ ait un rayon de convergence non nul. A quelles conditions nécessaires et suffisantes doit-elle satisfaire pour que la fonction f :

$$x \mapsto f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

soit solution de $(\mathcal{E}_\lambda)$ sur l'intervalle ouvert de convergence de la série ?

Dans la suite de cette partie, on désignera par σ_λ l'ensemble des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant à ces conditions.

b) Vérifier que, pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à σ_λ, les sous-suites $(a_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(a_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ sont telles que les séries :

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_{2p}\, x^{2p} \quad \text{et} \quad \sum_{p=0}^{\infty} a_{2p+1}\, x^{2p+1}$$

soient absolument convergentes pour tout x dans R.

c) Etude du cas particulier $\lambda = 2k$, où k appartient à N.

1) Pour tout élément $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de σ_{2k}, donner les valeurs des coefficients a_{2p-1} correspondant à $p \leq k$.

2) Calculer $a_{2k+2p+1}$ en fonction de a_{2k+1} pour tout p dans N.

3) Montrer que le sous-espace vectoriel S_{2k} de S est le plan vectoriel admettant pour base le système des deux fonctions :

$x \to x^{2k+1}\, u_k(x)$ et $x \to v_k(x)$

où $\quad u_k(x) = \sum_{p=0}^{\infty} C_{k+p}^{k} \frac{x^{2p}}{(2p+2k+1)!}$ $\quad$ et $\quad v_k(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p}}{2^p\, p!\, \prod_{j=1}^{p} (2j-2k-1)}$

4) Vérifier que, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $S_{-(2k+2)}$ est la droite vectorielle admettant pour vecteur directeur la fonction $u_k : x \mapsto u_k(x)$.

d) Vérifier que, pour tout λ n'appartenant pas à $2\mathbb{N}$, S_λ est de dimension 1.

e) Cas particulier où $\lambda = -(2k+1)$, avec k appartenant à $\mathbb{N}$.

1) Déterminer $\sigma_{-(2k+1)}$.

2) Montrer alors que $S_{-(2k+1)}$ est la droite vectorielle engendrée par la fonction g_k :

$$x \mapsto g_k(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!\,(k+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p}$$

f) Trouver S_{2k-1} en faisant dans $(\mathcal{E}_{2k-1})$ le changement de fonction inconnue défini par :

$$f = x^{2k} g .$$

g) Pour tout λ n'appartenant pas à Z, donner le vecteur directeur u de S_λ tel que $u(0) = 1$.

III

Cette partie est consacrée à la recherche, pour tout ν dans $\mathbb{R}_+$, de solutions y sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle :

$$(\mathcal{F}_\nu) : x^2 y'' + xy' - (x^2 + \nu^2)\, y = 0$$

Les notations S et S_λ y sont utilisées avec la même signification que dans la partie II.

a) r étant donné dans $\mathbb{R}$, à quelle condition nécessaire et suffisante doit satisfaire une fonction f de S pour que la fonction y définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$x \mapsto y(x) = x^r f(x)$$

soit solution de $(\mathcal{F}_\nu)$?

b) Pour tout r dans $\mathbb{R}$, on désigne par $\mathcal{B}_r$ l'ensemble des fonctions $x \mapsto x^r f(x)$, où f appartient à $S_{-(2r+1)}$. Montrer que $\mathcal{B}_\nu$ (resp. $\mathcal{B}_{-\nu}$) est l'ensemble des solutions y de $(\mathcal{F}_\nu)$ qui sont le produit par x^ν (resp. $x^{-\nu}$) d'une fonction f de S.

c) Dans le cas particulier où $\nu = k$, avec k appartenant à $\mathbb{N}$, vérifier que $\mathcal{B}_k = \mathcal{B}_{-k}$, cet ensemble étant une droite vectorielle dont on donnera un vecteur directeur.

d) On suppose dans cette question que $\nu = k + \frac{1}{2}$, k étant toujours un entier naturel.

1) Montrer que $\mathcal{B}_{k+\frac{1}{2}}$ est le plan vectoriel engendré par les fonctions :

$$x \mapsto x^{k+\frac{1}{2}} u_k(x) \quad \text{et} \quad x \mapsto x^{-k+\frac{1}{2}} v_k(x) ,$$

où u_k et v_k sont définies dans II c) 3)

2) Vérifier que $\mathcal{B}_{-\left(k+\frac{1}{2}\right)}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}_{k+\frac{1}{2}}$, ce dernier correspondant à la solution générale de $\left(\mathcal{F}_{k+\frac{1}{2}}\right)$ sur $\mathbb{R}_+^*$

3) Utilisant les résultats du I d), donner une expression simple de la solution générale de $\left(\mathcal{F}_{\frac{1}{2}}\right)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

e) Pour ν non multiple de $\frac{1}{2}$, démontrer que la somme de $\mathcal{B}_\nu$ et $\mathcal{B}_{-\nu}$ est directe, $\mathcal{B}_\nu \oplus \mathcal{B}_{-\nu}$ correspondant à la solution générale de $(\mathcal{F}_\nu)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

IV

A tout $n \in \mathbb{N}$, on associe la fonction :

$$I_n : x \mapsto I_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!\,(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p}.$$

a) Vérifier que I_n est définie continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

b)

1) Montrer que $I'_0 = I_1$.

2) Trouver, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, une expression simple de I'_n en fonction de I_{n-1} et I_{n+1}.

c)

1) Montrer que, pour tout x dans $\mathbb{R}$, on a :

$$|I_n(x)| \leq \frac{1}{n!} \left|\frac{x}{2}\right|^n e^{\frac{x^2}{4}}.$$

2) En déduire la convergence absolue, pour tout $(x, \theta) \in \mathbb{R}^2$, de la série de terme général : $I_n(x)\cos n\,\theta$.

d) Pour tout (x, θ) dans $\mathbb{R}^2$, on pose :

$$\frac{I_0(x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(x)\cos n\,\theta = \phi(x, \theta).$$

Etablir, pour tout θ dans $\mathbb{R}$, la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction :

$$x \mapsto \phi(x, \theta).$$

e) Démontrer que la même fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\phi'_x(x, \theta) = \frac{I'_0(x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} I'_n(x)\cos n\,\theta$$

f) Vérifier que :

$$\phi'_x(x, \theta) = \cos\theta \cdot \phi(x, \theta).$$

2) En déduire l'expression de $\phi(x, \theta)$ en fonction de x et θ.

3) Montrer alors que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad I_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{x\cos\theta} \cos n\theta\, d\theta.$$